Министерство образования и науки Республики Казахстан

ВОСТОЧНО-КАЗАХСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. Д.Серикбаева

В. Сидоренко

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические указания по выполнению курсовой работы

Усть-Каменогорск
2015

Курсовая работа по дисциплине «Математическая статистика» разработаны на кафедре «Высшая математика» для студентов бакалавриата и магистрантов различных специальностей.

Одобрено учебно-методическим советом факультета ИТиБ

Председатель Г.Уазырханова

Протокол №__1__ от____17.09________2015 г.

Обсуждено на заседании кафедры высшей математики

Зав. кафедрой С.Тыныбекова

Протокол №__1__ от_____28.08_______2015 г.

Разработал
ст.преподаватель В.Сидоренко

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Данная курсовая работа выполняется по элективной дисциплине «Математическая статистика». работа предполагает изучение теоретического материала по дисциплине и выполнение расчетов в соответствии с индивидуальным заданием.

1 Программа курса

§1 Элементы математической статистики.

п1.1 Методы статистического описания наблюдений.

Математическая статистика это наука о методах сбора, группировки, анализа статистических данных и установления на их основе законов распределения исследуемых признаков (качественных или количественных). Методами математической статистики решаются многие практические задачи. К их числу относятся: определение приближенных значений различных характеристик и параметров распределения изучаемого признака, установление вида и степени связи между изучаемыми признаками и др.

Исследовать непосредственно признак (*генеральную совокупность* объектов), как правило, невозможно, да и не рационально. С этой целью проводится исследование наблюдаемого признака на основе части генеральной совокупности - по *выборочной совокупности* (*выборке*).

Выборкой объема n из генеральной совокупности с функцией распределения $F(x)$ называется последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n$, наблюдаемых значений случайной величины X, соответствующих независимым повторениям эксперимента. Наблюдаемые значения x_i признака X называются *вариантами* (от слова варианта), а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке - *вариационным рядом.*

Некоторые значения вариант x_i в вариационном ряде могут повторяться некоторое количество раз n_i . Значения n_i называются *частотами* соответствующей варианты x_i.

Статистическим рядом называется перечень вариант x_i вариационного ряда с соответствующими им частотами n_i.

При большом объеме выборки ее элементы объединяют в группы, представляя результаты опытов в виде *сгруппированного статистического ряда.* Для этого интервал, содержащий все элементы выборки, разбивают на k частичных непересекающихся интервалов. После чего получается статистический ряд $(x_i^*; n_i^*)$, где x_i^*- какая-либо точка i – го интервала, например его середина; n_i^* - число вариант выборки, попавших i – й интервал.

Относительной частотой варианты x_i называется отношение $w_i = n_i/n$.

Для графического отображения статистических рядов используются полигон и гистограмма. *Полигоном* называется ломаная линия построенная в системе координат $(x;\ n)$, и соединяющая точки $(x_i\ ;\ n_i)$. *Гистограммой* частот (относительных частот) называется ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, построенных на интервалах с высотами

$$h_i^* = n_i^* \cdot \Delta x \; (h_i^* = n_i^* / n \cdot \Delta x).$$

Эмпирической функцией распределения называется функция $F^*(x)$ определяющая для каждого значения X относительную частоту события $X < x$:

$$F^*(x) = \frac{1}{n} \sum_{x_i < x} n_i. \qquad (1)$$

п1.2 Числовые (точечные) оценки параметров распределения.

Используя выборку наблюдений случайной величины, можно вычислить приближенные значения каждого из параметров генеральной совокупности, называемых в статистике числовыми (точечными) оценками параметров или просто оценками. В качестве оценки математического ожидания генеральной совокупности принимают выборочную среднюю:

$$M(X) = \overline{X_в}, \quad \text{где} \quad \overline{X_в} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^* \cdot n_i^*. \qquad (2)$$

Рассеяние значений признака X относительно своего среднего значения определяется дисперсией или средним квадратическим отклонением. Оценкой дисперсии является исправленная выборочная дисперсия

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum \left(x_i^* - \overline{X_в}\right)^2 \cdot n_i^*. \qquad (3)$$

Оценкой среднего квадратического генеральной совокупности является исправленное выборочное среднее квадратическое

$$S = \sqrt{S^2}.$$

Наряду с исправленной дисперсией может быть определена выборочная дисперсия

$$D_в = \overline{X_в^2} - \overline{X_в}^2, \quad \text{где} \quad \overline{X_в^2} = \frac{1}{n}\sum \left(x_i^*\right)^2 \cdot n_i^*. \qquad (4)$$

2. Курсовая работа

2.1 Цель курсовой работы.

Основной целью данной работы является изучение теоретических основ и самих методов математической статистики по обработке результатов наблюдений, а также выработка практических навыков по обработке этих результатов .

2.2 Задание на курсовую работу.

Дана выборка из нормального распределения **N(0,1)**.

0,414	0,011	0,666	-1,132	-0,410	-1,077	1,484	-0,340	0,789	-0,494	0,364
-1,237	-0,044	-0,111	-0,210	0,931	0,616	-0,377	-0,433	1,048	-0,037	0,759
0,609	-2,043	–2,290	0,404	-0,543	0,486	0,869	0,347	2,816	-0,464	-0,632
-1,614	0,372	-0,074	-0,916	1,314	-0,038	0,673	0,563	-0,107	0,131	-1,808
0,284	0,458	1,307	-1,625	-0,629	-0,504	-0,0056	-0,131	0,048	1,879	-1,016
0,360	-0,119	2,331	1,672	-1,053	0,840	0,246	-0,237	-1,312	1,603	-0,952
-0,566	1,600	0,465	1,951	0,110	0,251	0,116	-0,957	-0,190	1,479	-0,986
1,249	1,934	0,070	-1,358	-1,246	-0,959	-1,297	-0,722	0,925	0,783	-0,402
0,619	1,826	1,272	-0,945	0,494	0,050	-1,696	1,876	0,063	0,132	0,682
0,544	-0,417	-0,666	-0,104	-0,253	-2,543	-1,133	1,987	0,668	0,360	1,927
1,183	1,211	1,765	0,035	-0,359	0,193	-1,023	-0,222	-0,616	-0,060	-1,319
-0,785	-0,430	-0,298	0,248	-0,088	-1,379	0,295	-0,115	-0,621	-0,618	0,209
0,979	0,906	-0,096	-1,376	1,047	-0,872	-2,200	-1,384	1,425	-0,8l5	0,748
-1,095.										

Начиная с номера $2K$, где K - номер по списку группы, выберите подряд 100 чисел (дойдя до конца таблицы, перейдите в ее начало).

Построить сгруппированный статистический ряд, выбрав в качестве интервалов группировки интервалы (-3, -2), (-2, -1), …, (2, 3) .

Построить гистограмму, полигон и эмпирическую функцию распределения, вычислить выборочную среднюю, исправленную выборочную дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Сравните полученные значения числовых характеристик выборки с теоретическими значениями этих величин.

Вычислить также асимметрию и эксцесс, на основе их значений указать положение максимума эмпирической плотности распределения вероятностей относительно максимума теоретической кривой.

Проверить по критерию Пирсона на уровне значимости $\alpha = 0,05$ гипотезу о нормальном законе распределения генеральной совокупности, из которой сделана данная выборка.

2.3 Содержание курсовой работы.

В данной курсовой работе необходимо выполнить расчеты в соответствии с заданием, построить необходимые графики и сделать требуемые выводы по работе.

3. Методические указания по выполнению курсовой работы

Пример. Дана выборка значений случайной величины имеющей нормальный закон распределения с параметрами $\boldsymbol{a = 0, \sigma = 1}$ ($\boldsymbol{N(0,1)}$)

0,609	-2,043	-2,29	0,404	-0,543	0,486	0,869	0,347	2,816	-0,464
0,360	-0,119	2,331	1,672	-1,053	0,84	0,246	-0,237	-1,312	1,603
1,249	1,934	0,070	-1,358	-1,246	-0,959	-1,297	-0,722	0,925	0,783
0,544	-0,417	-0,666	-0,104	-0,253	-2,543	-1,133	1,987	0,668	0,360
-0,785	-0,43	-0,298	0,248	-0,088	-1,379	0,295	-0,115	-0,621	-0,618

Построить статистический ряд распределения, гистограмму, полигон частот и эмпирическую функцию распределения, вычислить выборочную среднюю, исправленную выборочную дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Сравнить полученные значения числовых характеристик выборки с теоретическими значениями этих величин.

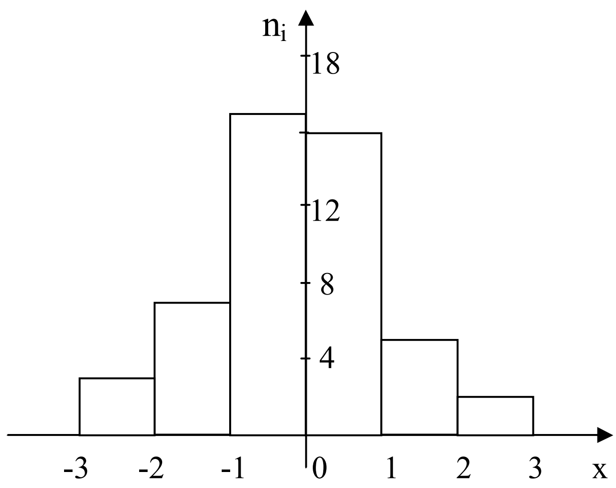
Решение. Т.к. значения случайной величины различны и их количество достаточно велико, то построим сгруппированный статистический ряд.
Для этого возьмем в качестве интервалов группировки интервалы:
(-3; -2), (-2 ; -1), (-1 ; 0), (0 ; 1), (1 ; 2), (2 ; 3). Затем подсчитаем количество значений случайной величины попавших в каждый интервал, найденные величины будут являться частотами $\mathbf{n_i}$ (i=1,2,…,6) статистического ряда. Результаты приведены в таблице.

	Интервалы						
	(-3 ; -2)	(-2 ; -1)	(-1 ;0)	(0 ; 1)	(1 ; 2)	(2 ; 3)	
Значения случайной величины	-2,543	-1,379	-0,959	0,070	1,249	2,331	Объем выборки
	-2,290	-1,358	-0,785	0,246	1,603	2,816	
	-2,043	-1,312	-0,722	0,248	1,672		
		-1,297	-0,666	0,295	1,934		
		-1,246	-0,621	0,347	1,987		
		-1,133	-0,618	0,360			
		-1,053	-0,543	0,360			
			-0,464	0,404			
			-0,43	0,486			
			-0,417	0,544			
			-0,298	0,609			
			-0,253	0,668			
			-0,237	0,783			
			-0,119	0,84			
			-0,115	0,869			
			-0,104	0,925			
			-0,088				
Частоты, $\mathbf{n_i}$	3	7	17	16	5	2	n=50

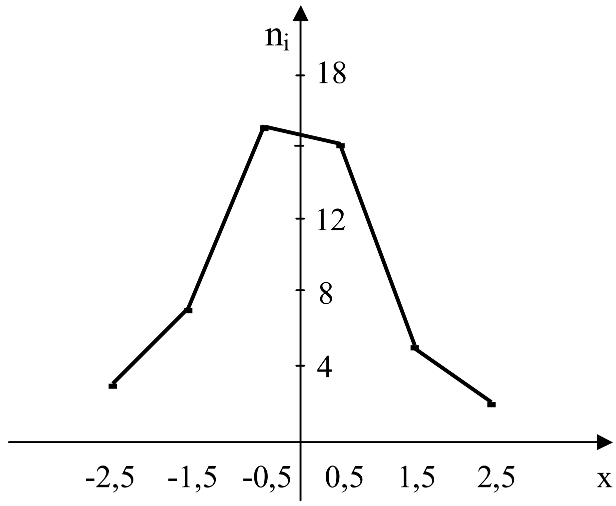
В качестве вариант $\mathbf{x_i}$ (i=1,2,…,6) ряда возьмем середины интервалов. Получим сгруппированный статистический ряд

Значения вариант, x_i	-2,5	-1,5	-0,5	0,5	1,5	2,5
Частоты, n_i	3	7	17	16	5	2
Относительные частоты, w_i	0,06	0,14	0,34	0,32	0,1	0,04

Для полученного статистического ряда строим гистограмму и полигон.



Гистограмма.



Полигон.

Эмпирическую функцию распределения находим по формуле

$$\mathbf{F(x) = \frac{1}{n} \sum_{x_i < x} n_i} .$$

Получим:

при $x \le -2,5$ => $F(x) = 0$, т.к. в статистическом ряде нет значений меньших, чем -2,5;

при $-2,5 < x \le -1,5$ => $F(x) = n_1/n = 3/50=0,06$;

при $-1,5 < x \le -0.5$ => $F(x) = (n_1+n_2)/n = (3+7)/50=10/50=0,2$;

при $-0,5 < x \le 0,5$ => $F(x) = (n_1+n_2+n_3)/n = (3+7+17)/50=27/50=0,54$;

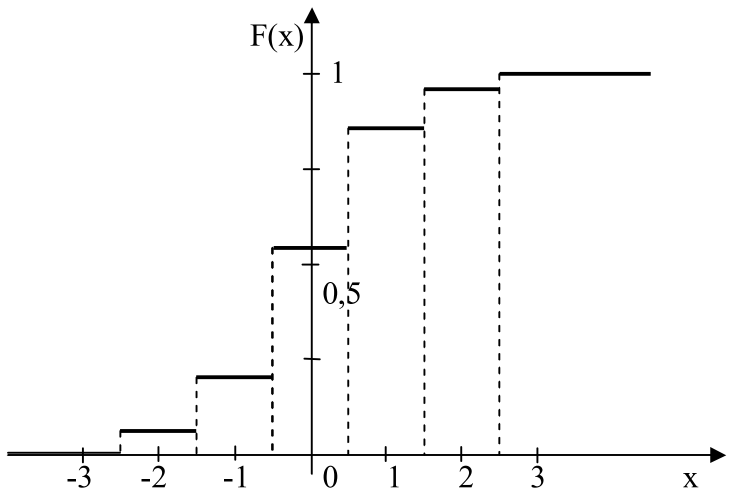
и т.д.,

при $x > 2,5$ => $F(x) = (n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_6)/n = 50/50=1$.

Таким образом, эмпирическая функция имеет вид

$$\mathbf{F(x)}=\begin{cases}\mathbf{0,} & \mathbf{при} \quad \mathbf{x\le -2{,}5;}\\ \mathbf{0{,}06,} & \mathbf{при} \ -\mathbf{2{,}5<x\le -1{,}5;}\\ \mathbf{0{,}2,} & \mathbf{при} \ -\mathbf{1{,}5<x\le -0{,}5;}\\ \mathbf{0{,}54,} & \mathbf{при} \ -\mathbf{0{,}5<x\le 0{,}5;}\\ \mathbf{0{,}86,} & \mathbf{при} \quad \mathbf{0{,}5<x\le 1{,}5;}\\ \mathbf{0{,}96,} & \mathbf{при} \quad \mathbf{1{,}5<x\le 2{,}5;}\\ \mathbf{1,} & \mathbf{при} \quad \mathbf{x}>2{,}5.\end{cases}$$

Графиком этой функции будет



Далее, находим числовые характеристики выборки.
Выборочную среднюю вычислим по формуле

$$\overline{X}_в=\frac{1}{n}(x_1\cdot n_1+x_2\cdot n_2+x_3\cdot n_3+x_4\cdot n_4+x_5\cdot n_5+x_6\cdot n_6)=$$

$$=((-2{,}5)\cdot 3+(-1{,}5)\cdot 7+(-0{,}5)\cdot 17+0{,}5\cdot 16+1{,}5\cdot 5+2{,}5\cdot 2)/50=-6/50=-0{,}12.$$

Выборочную дисперсию вычислим по формуле

$$\overline{D}_в=\overline{X^2_в}-\left(\overline{X}_в\right)^2.$$

Получим

$$\overline{X^2_в}=\frac{1}{n}(x_1^2\cdot n_1+x_2^2\cdot n_2+x_3^2\cdot n_3+x_4^2\cdot n_4+x_5^2\cdot n_5+x_6^2\cdot n_6)=$$

$$=((-2{,}5)^2\cdot 3+(-1{,}5)^2\cdot 7+(-0{,}5)^2\cdot 17+0{,}5^2\cdot 16+1{,}5^2\cdot 5+2{,}5^2\cdot 2)/50=66{,}5/50=1{,}33,$$

$$\overline{D}_в=1{,}33-(-0{,}12)^2=1{,}3156.$$

Тогда исправленная выборочная дисперсия будет равна

$$S^2=\frac{n}{n-1}\overline{D}_в=\frac{50}{49}\cdot 1{,}3156=1{,}3424\approx 1{,}34.$$

Исправленное среднее квадратическое отклонение являющееся оценкой параметра **σ** будет равно

$$s = \sqrt{S^2} = \sqrt{1{,}34} = 1{,}16.$$

Сравнивая полученные значения оценок параметров нормального распределения $\overline{X}_в$ и s с теоретическими значениями параметров ***a* = 0, *σ*=1**, отмечаем, что отличия имеются (12% и 16%) и они обусловлены объемом выборки.

Другими характеристиками, показывающими отклонение закона распределения выборки от нормального закона **N (0,1),** являются асимметрия a_s и эксцесс $e_к$.

Для определения этих характеристик необходимо найти начальные моменты до четвертого порядка включительно и центральные моменты третьего и четвертого порядка.

Начальные моменты находятся по формулам $\boldsymbol{\nu_s = \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{k} x_i^s \cdot n_i}$

$$\boldsymbol{\nu_s^* = \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{k} x_i^s \cdot n_i}\,,\ \ s=1,2,3,4.$$

Очевидно, что первый и второй начальные моменты

$$\boldsymbol{\nu_1} = \overline{X}_в, \quad \boldsymbol{\nu_2} = \overline{X_в^2}\,.$$

Определим третий и четвертый начальные моменты

$$\nu_3 = \frac{1}{n}(x_1^3 \cdot n_1 + x_2^3 \cdot n_2 + x_3^3 \cdot n_3 + x_4^3 \cdot n_4 + x_5^3 \cdot n_5 + x_6^3 \cdot n_6) =$$

$$=((-2{,}5)^3 \cdot 3 + (-1{,}5)^3 \cdot 7 + (-0{,}5)^3 \cdot 17 + 0{,}5^3 \cdot 16 + 1{,}5^3 \cdot 5 + 2{,}5^3 \cdot 2)/50 = -22{,}5/50 = -0{,}45,$$

$$\nu_4 = \frac{1}{n}(x_1^4 \cdot n_1 + x_2^4 \cdot n_2 + x_3^4 \cdot n_3 + x_4^4 \cdot n_4 + x_5^4 \cdot n_5 + x_6^4 \cdot n_6) =$$

$$=((-2{,}5)^4 \cdot 3 + (-1{,}5)^4 \cdot 7 + (-0{,}5)^4 \cdot 17 + 0{,}5^4 \cdot 16 + 1{,}5^4 \cdot 5 + 2{,}5^4 \cdot 2)/50 =$$

$$= 258{,}125/50 = 5{,}1625.$$

Для определения центральных моментов μ_3, μ_4 воспользуемся формулами

$$\boldsymbol{\mu_3^* = \nu_3^* - 3\nu_1^*\nu_2^* + 2(\nu_1^*)^3}\ \ ,$$

$$\boldsymbol{\mu_4^* = \nu_4^* - 4\nu_1^*\nu_3^* + 6(\nu_1^*)^2 \cdot \nu_2^* - 3(\nu_1^*)^4}\,.$$

$$\boldsymbol{\mu_3 = 0{,}0253, \quad \mu_4 = 5{,}1625 - 4\cdot(-0{,}12)\cdot(-0{,}45) + 6\cdot(-0{,}12)^2\cdot 1{,}33 - 3\cdot(-0{,}12)^4 = 5{,}0608.}$$

Асимметрию a_s и эксцесс $e_к$ вычислим по формулам:

$$\boldsymbol{a_s = \frac{\mu_3}{s^3}, \quad e_k = \frac{\mu_4}{s^4} - 3}\,.$$

Получим

$$\boldsymbol{a_s = \frac{0.0253}{1.16^3} = 0.0162, \quad e_k = \frac{5.0608}{1.16^4} - 3 = -0.2050}\,.$$

Т.к. асимметрия a_s положительна, то пик эмпирической кривой смещен влево относительно пика теоретической кривой нормального закона. Отрицательное значение эксцесса означает, что пик кривой эмпирического закона распределения находится ниже пика теоретической кривой нормального закона.

Если вид закона распределения не известен, по виду полигона или гистограммы выдвигается гипотеза о виде закона распределения, которая затем проверяется с использованием некоторого критерия.

Будем полагать, что нами принята гипотеза о нормальном законе распределения генеральной совокупности, из которой извлечена данная выборка. Проверим эту гипотезу по критерию Пирсона на уровне значимости $\alpha = 0.05$. Для этого необходимо вычислить характеристику

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i},$$

где p_i – вероятность попадания значения выборки в i – й интервал.

Найдем эти вероятности по известной формуле

$$P(x_1 < X < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - \overline{X}_в}{s}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \overline{X}_в}{s}\right).$$

Получим

$$p_1 = P(-3 < X < -2) = \Phi\left(\frac{-2 + 0.12}{1.16}\right) - \Phi\left(\frac{-3 + 0.12}{1.16}\right) = \Phi(-1.62) - \Phi(-2.48) =$$

$= -0,4474 + 0,4933 = 0,0459,$

$$p_2 = P(-2 < X < -1) = \Phi\left(\frac{-1 + 0.12}{1.16}\right) - \Phi\left(\frac{-2 + 0.12}{1.16}\right) = \Phi(-0.76) - \Phi(-1.62) =$$

$= - 0,2764 + 0,4474 = 0,1710,$

$$p_3 = P(-1 < X < 0) = \Phi\left(\frac{0 + 0.12}{1.16}\right) - \Phi\left(\frac{-1 + 0.12}{1.16}\right) = \Phi(0.10) - \Phi(-0.76) =$$

$= 0,0398 + 0,2764 = 0,3162,$

$$p_4 = P(0 < X < 1) = \Phi\left(\frac{1 + 0.12}{1.16}\right) - \Phi\left(\frac{0.12}{1.16}\right) = \Phi(0.97) - \Phi(0.10) =$$

$= 0,3340 - 0,0398 = 0,2942,$

$$p_5 = P(1 < X < 2) = \Phi\left(\frac{2 + 0.12}{1.16}\right) - \Phi\left(\frac{1 + 0.12}{1.16}\right) = \Phi(1.83) - \Phi(0.97) =$$

$= 0,4663 – 0,3340 = 0,1323,$

$$p_6 = P(2 < X < 3) = \Phi\left(\frac{3 + 0.12}{1.16}\right) - \Phi\left(\frac{2 + 0.12}{1.16}\right) = \Phi(2.69) - \Phi(1.83) =$$

$= 0,4965 – 0,4663 = 0,0302.$

Далее, находим значение χ^2. Вычисления удобно проводить в таблице

№	n_i	p_i	np_i	$n_i - np_i$	$(n_i - np_i)^2$	$(n_i - np_i)^2/(np_i)$
1	3	0,0459	2,2950	0,7050	0,4970	0,2166
2	7	0,1710	8,5500	-1,5500	2,4025	0,2810
3	17	0,3162	15,8100	1,1900	1,4161	0,0896
4	16	0,2942	14,7100	1,2900	1,6641	0,1131
5	5	0,1323	6,6150	-1,6150	2,6082	0,3943
6	2	0,0302	1,5100	0,4900	0,2401	0,1590
Σ	50					1,2536

Таким образом, получили для данной выборки значение характеристики

$$\chi^2 = 1{,}2536.$$

По таблице распределения χ^2 находим $\chi^2_{кр}$ для заданного уровня значимости α =0.05 и числа степеней свободы $k = r - 3 = 6 - 3 = 3$, где r равно числу интервалов сгруппированного статистического ряда.

Значение $\chi^2_{кр}$ будет равно

$$\chi^2_{кр}(\alpha;\ k) = \chi^2_{кр}(0{,}05;\ 3) = 7{,}8.$$

Т.к. для полученного χ^2 справедливо

$$\chi^2 < \chi^2_{кр},$$

то нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном законе распределения генеральной совокупности, из которой была сделана данная выборка.

4 Оформление пояснительной записки

Результаты курсовой работы должны быть оформлены в отдельной тетради (не более 12-ти листов) или на листах формата А4. В представляемой на проверку работе должен быть указан вариант, *полностью* выписано задание, приведены все расчеты с пояснениями, построены требуемые в работе графики и сделаны выводы по результатам работы.

Список литературы

Основная литература

1 Гнеденко Б.В. Курс теории вероятности . М.: Высшая школа, 2009г.
2 Гмурман В.Е.Теория вероятностей и математическая статистика М.: Высшая школа, 1998г.
3 Чистяков В.П.Курс теории вероятностей. М.: Высшая школа, 1982г.
4 Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистики.М.: Высшая школа, 2008 г.
5 Тыныбекова С.Д., Рахметуллина Ж.Т., Конырханова А.А. Теория вероятностей и математическая статистика в вопросах и задачах.Учебное пособие, Усть-Каменогорск, ВКГТУ, 2012 - 122с.
6 Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.Теория вероятностей (задачи и упражнения). М.: Высшая школа, 2010 г.
7 Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчета) .М.: Высшая школа, 2007 г.
8 Под редакцией Рябушко А.П. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике ч.4. Минск.: Вышейшая школа, 2006 г.

Дополнительная литература

9 Белослюдова В.В. Статистический анализ моделей, проверка их согласованности с результатами наблюдений. У-К, 2002г.
10 Жевняк Р. М., Карпук А.А.Высшая математика.ч. 1-5. Минск: Вышейшая школа, 1998
11 Кудрявцев Л.Д.Краткий курс математического анализа. М.: Высшая школа, 1989г.
12 Кудрявцев Л.Д.Курс математического анализа. Т. 1,2 .М.: Высшая школа, 1981г.
13 Тыныбекова С.Д. и др. Теория вероятностей и математическая статистика (решение задач по ТР). У-К, 2009 г.
14 Корн Г. И Корн Т.Справочник по математике. М.: Наука, 1977г.
15 Бронштейн И. Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров. М.: Высшая школа, 1997г.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,89
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0